Die Modulgruppe und ihr Fundamentalbereich

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie I, 09.03.2009

Anna Scholz

In diesem Vortrag wird zunächst die Modulgruppe eingeführt und anschließend der Fundamentalbereich der Modulgruppe vorgestellt.

§1 Die Modulgruppe

In diesem Abschnitt wird die Modulgruppe eingeführt.

Zur Erinnerung:
Die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ wurde in der Vorlesung zu Funktionentheorie bereits angesprochen.
Für $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ nennt man $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbiustransformation (vgl. Funkttheoskript VII, 2.1).

(1.1) Definition (Modulgruppe)
Die Menge alle Möbiustransformationen mit Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
und $ad - bc = 1$ wird Modulgruppe genannt und im Folgenden mit Γ bezeichnet.
Die Gruppe kann also auch durch 2x2 Matrizen repräsentiert werden.
$\Gamma := SL_2(\mathbb{Z}) := \{M \in Mat(2, \mathbb{Z}); det(M) = 1\}$ ◇

Die Koeffizienten des Matrizenprodukts AB sind ganze Zahlen, da die Koeffizienten von A und B aus $\mathbb{Z}$ sind und die Einheitsmatrix E hat ebenfalls Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Darüber hinaus gilt $det(E) = 1$ und $det(AB) = det(A)det(B)$. Da $det(M) \neq 0$ existiert darüber hinaus $M^{-1} = \frac{1}{det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, womit Γ tatsächlich eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation bildet.

Es sei kurz angemerkt, dass für $z \in \mathbb{H}$ und $M \in \Gamma$gilt:

$$Mz = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{-az-b}{-cz-d} = -Mz \tag{1}$$

Des Weiteren gilt, dass $\mathbb{H}$ stabil unter der Gruppenoperation ist, denn:

$$\begin{aligned}
Im(Mz) &= \frac{1}{2i}(Mz - M\overline{z}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(az+b)(c\overline{z}+d) - (a\overline{z}+b)(cz+d)}{(cz+d)(\overline{cz+d})} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{az\overline{z}c + adz + bcz + bd - az\overline{z}c - a\overline{z}d - bcz - bd}{(cz+d)(\overline{cz+d})} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}
\end{aligned}$$

wenn man sich für $z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - (x - iy)) = \frac{1}{2i}2iy = y = Im(z)$$

in Erinnerung ruft.

— Spezielle Elemente der Modulgruppe —

Im Folgenden werden zwei Elemente aus Γ näher betrachtet. Später wird gezeigt, dass die Modulgruppe von diesen Elementen erzeugt wird.

Wir betrachten

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{„Involution“ und } T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{„Translation“} \tag{2}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$Sz = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z = -\frac{1}{z} \tag{3}$$

$$Tz = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = z + 1 \tag{4}$$

$$S^2 = E \tag{5}$$

$$T^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{für } m \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

$$(ST)^3 = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = E^3 \tag{7}$$

(1.2) Lemma
Seien $c, d \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Dann existiert eine Matrix $M \in \Gamma$ mit $M := \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$. ⋄

Beweis
Seien $c, d \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, dann folgt aus dem erweiterten euklidischen Algorithmus (Zahlbereichserweiterung), dass $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren, mit $ad - bc = 1$. Somit ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ein Element von Γ. □

§2 Der Fundamentalbereich der Modulgruppe

Sei G eine Untergruppe der Modulgruppe Γ. Zwei Punkte z und z' $\in \mathbb{H}$ sind äquivalent unter G, wenn $z = Mz'$, für ein $M \in G$. Da G eine Gruppe ist, ist dies eine Äquivalenzrelation.
Diese Äquivalenzrelation teilt die obere Halbebene in eine disjunkte Menge von Äquivalenzklassen, also Bahnen unter der Operation von G. Betrachtet man jeweils einen Punkt aus jeder Bahn, dann nennt man die Vereinigung all dieser Punkte eine fundamentale Menge von G.
Im Folgenden betrachten wir nun $D \subset \mathbb{H}$, $D := \left\{ \in \mathbb{C}; |z| \geq 1, |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$ und zeigen, dass D ein Fundamentalbereich der Modulgruppe Γ ist.

(2.1) Satz
1. Für jedes $z \in \mathbb{H}$ existiert ein $M \in \Gamma$, sodass $Mz \in D$.

2. Seien zwei verschiedene Punkte $z, z' \in D$ kongruent modulo Γ. Dann gilt:

$$R(z) = \pm\frac{1}{2} \text{ und } z = z' \pm 1, \text{ oder}$$
$$|z| = 1 \text{ und } z' = -\frac{1}{z}$$

3. Sei $z \in D$ und sei $I(z) = \{\, M | M \in \Gamma, Mz = z\}$ der Stabilisator von z in Γ.
   Es gilt $I(z) = E$ außer in den folgenden drei Fällen:

Für $z = \ i$ ist $I(z)$ die Gruppe der Ordnung 2, die von S erzeugt wird

Für $z = \ \rho = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist $I(z)$ die Gruppe der Ordnung 3, die von ST erzeugt wird

Für $z = -\overline{\rho} = e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist $I(z)$ die Gruppe der Ordnung 3, die von TS erzeugt wird

◇

(2.2) Definition (Begriff)
Seien gewisse Voraussetzungen erfüllt. Dann definieren wir *Begriff* durch ... ◇

Der Begriff aus 2.2 führt uns sofort zu folgender Aussage.

(2.3) Lemma
Seien gewisse Voraussetzungen erfüllt. Dann gilt:

a) Hier steht die erste Aussage.

b) Hier steht die zweite Aussage.

c) Hier steht die dritte Aussage. ◇

Beweis
a) trivial

b) klar

c) folgt aus Teil (a) und (b) □

Nun kann auch ein einfaches Beispiel angegeben werden.

(2.4) Beispiel
Seien gewisse Voraussetzungen erfüllt. Dann gilt

$$a = b \overset{(2.2)}{=} c + \underbrace{d - d}_{=0} = c$$

und man erhält

$$\begin{aligned} a = c = d = e \\ = f = g = h \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} h &\overset{(2.3)(b)}{=} i = j \\ &= k. \end{aligned}$$

◇

Hiermit leiten wir zum zweiten Unterabschnitt über.

— *Zweiter Unterabschnitt* —

In diesem Unterabschnitt geht es um dieses und jenes.

§ 3 Zweiter Abschnitt

Hier geht es weiter mit dem zweiten Abschnitt.